

Klassenstufe 10

Geometrie

Kreis

Inhalt

Kreisring – Kreisausschnitt – Kreisabschnitt – Kreisbogenzweieck

Datei Nr. 11512

Friedrich Buckel

Stand: 25. Mai 2008

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

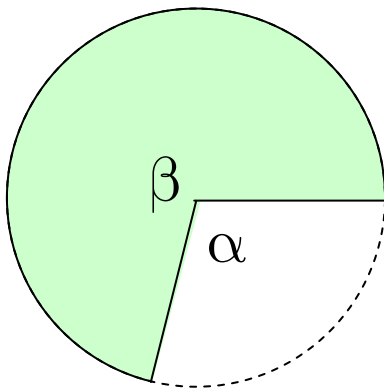
www.mathe-cd.de

Inhalt

1.	Kreisringe	1
2.	Kreisausschnitte	2
3.	Kreisabschnitte	4
4.	Kreisbogenzweiecke	7

Demo: Mathe-CD

2. Kreisausschnitte



Aus einem Kreis wurde ein Flächenstück herausgeschnitten. Wenn dieses bis zum Mittelpunkt reicht, nennt man es einen **Kreisausschnitt**.

Damit entstehen jedoch immer 2 Kreisausschnitte, einer mit einem Mittelpunktswinkel α und einer mit dem Mittelpunktswinkel $\beta = 360^\circ - \alpha$.

Die **Berechnung von Inhalt und Bogenlänge des Ausschnitts** geschieht über die Formeln des Kreises.

Beispiele

- a) Für $\alpha = 90^\circ$ liegt ein Viertelkreis vor, also ist der Inhalt auch nur ein Viertel der Kreisfläche und der Bogen ein Viertel des Kreisumfangs:

$$A = \frac{1}{4} \pi r^2 \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{1}{2} \pi r$$

- b) Für $\alpha = 120^\circ$ liegt ein Drittelkreis vor:

$$A = \frac{1}{3} \pi r^2 \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{3} \cdot 2\pi r = \frac{2}{3} \pi r$$

- c) Für $\alpha = 72^\circ$ müssen wir den Bruchteil erst berechnen:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{72^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{5} \Rightarrow A = \frac{1}{5} \pi r^2 \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{5} \cdot 2\pi r = \frac{2}{5} \pi r$$

- d) Allgemein rechnet man so:

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \quad (1) \quad \text{und} \quad b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \quad (2)$$

Es gibt eine weitere Formel für den Inhalt des Kreisausschnitts, die man bei folgender Aufgabe benötigt:

Ein Kreisausschnitt hat den Bogen $b = 12 \text{ cm}$ und den Radius 5 cm .
Berechne den Flächeninhalt des Ausschnitts.

Wir dividieren A durch b und verwenden dazu die Formeln (1) und (2):

$$\frac{A}{b} = \frac{\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2}{\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r} = \frac{r}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2} br} \quad (3)$$

Also folgt für die Lösung der Aufgabe: $A = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 30 \text{ cm}^2$.

Rechenbeispiele zu diesem Thema

- (1) Gegeben ist ein Kreisausschnitt mit dem Flächeninhalt 40 cm^2 und dem Radius 8 cm . Berechne den Innenwinkel und den zugehörigen Kreisbogen.

Lösung

Da A gegeben und α gesucht ist, beginnt man mit dieser Formel:

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \Rightarrow \alpha = \frac{A \cdot 360^\circ}{\pi r^2} = \frac{40 \text{ cm}^2 \cdot 360^\circ}{\pi \cdot 64 \text{ cm}^2} \approx 71,6^\circ$$

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{71,6^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 8 \text{ cm} \approx 10 \text{ cm}$$

oder besser mit der 3. Formel: $A = \frac{1}{2}br \Rightarrow b = \frac{2A}{r} = \frac{80 \text{ cm}^2}{8 \text{ cm}} = 10 \text{ cm}$

Jetzt erhalten wir **genau** 10 cm , zuvor nur „ungefähr“.

- (2) Gegeben sind der Bogen eines Ausschnitts mit $b = 24 \text{ cm}$ und der Innenwinkel $\alpha = 105^\circ$. Berechne seinen Radius und die Fläche.

Lösung

Bogenlänge: $b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \Rightarrow r = \frac{b \cdot 360^\circ}{2\pi \cdot \alpha} = \frac{24 \text{ cm} \cdot 360^\circ}{2\pi \cdot 105^\circ} \approx 13,1 \text{ cm}$

Flächeninhalt:

Entweder so: $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{105}{360} \cdot \pi \cdot 13,1^2 \text{ cm}^2 \approx 157,2 \text{ cm}^2$

oder so: $A = \frac{1}{2}br = \frac{1}{2} \cdot 24 \text{ cm} \cdot 13,1 \text{ cm} \approx 157,2 \text{ cm}^2$

- (3) Gegeben ist ein Ausschnitt mit dem Inhalt 1 m^2 und dem Bogen 10 m . Wie groß ist dazu der Innenwinkel?

Lösung

Wenn A und b gegeben sind, verwendet man die Formel (3):

$$A = \frac{1}{2}br \Rightarrow r = \frac{2A}{b} = \frac{2 \cdot 1 \text{ m}^2}{10 \text{ m}} = 0,2 \text{ m}$$

Nun der Innenwinkel, z.B. über die Bogenformel:

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \Rightarrow \alpha = \frac{b \cdot 360^\circ}{2\pi r} = \frac{10 \text{ m} \cdot 360^\circ}{2\pi \cdot 0,2 \text{ m}} \approx 2865^\circ.$$

Man sieht, dass dies nicht möglich ist.

Es gibt offenbar keinen Ausschnitt mit diesen Maßen!